

Mètodes de raonament i demostració.

Demostracions indirectes

Existeixen bàsicament dos tipus de demostracions indirectes: les **demostracions pel contrarecíproc** i les **demostracions per contradicció** o **reducció a l'absurd**. Ambdues s'inicien amb la hipòtesi de que la conclusió q és falsa.

Aquests tipus de demostracions són molt habituals, per exemple, en cas de tenir que demostrar la unicitat d'algun concepte.

Demostracions pel contrarecíproc

En lloc de demostrar $p \Rightarrow q$, es pot provar $\neg q \Rightarrow \neg p$. Aquest tipus de demostració és convenient quan hi trobem el quantificador universal.

Exemple: Sigui $a \geq 0$ un nombre real. Si $\forall \varepsilon > 0$, $0 \leq a < \varepsilon$, aleshores $a = 0$.

Demostració. Si $a \neq 0$, llavors com $a \geq 0$ hem de tenir $a > 0$.

Escollim $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$, llavors tenim $\varepsilon_0 > 0$ i $\varepsilon_0 < a$, d'on deduïm que la hipòtesi $0 \leq a < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ és falsa. q.e.d.

Exemple: Si m, n són nombres naturals tals que $m + n \geq 10$, aleshores $m \geq 5$ ó $n \geq 5$.

Demostració. Si la conclusió és falsa, llavors es compleix $m < 5$ i $n < 5$ (lei de De Morgan).

Al sumar desigualtats obtenim $m + n < 5 + 5 = 10$, per tant la hipòtesi és falsa. Així doncs $m + n \geq 10$ si $m \geq 5$ ó $n \geq 5$. q.e.d.

Demostracions per reducció a l'absurd

Per demostrar $p \Rightarrow q$ el mètode de reducció a l'absurd consisteix a suposar com a certa $\neg q$ (és a dir, suposar que q és falsa) i raonar lògicament fins arribar a una contradicció amb la hipòtesi p . Quan passa això es diu que la contradicció prové de suposar que la tesi era falsa (o que l'absurd ha estat aquesta suposició).

Exemple: $\sqrt{2}$ és un nombre irracional.

Demostració. Suposem que $\sqrt{2}$ és un nombre racional. Aleshores $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ on p i q són enters primers relatius.

Per tant

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ parell} \Rightarrow p \text{ parell (múltiple de 2)}$$

Així doncs $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q \text{ parell (múltiple de 2)}$$

Per tant p i q no són primers relatius. *Contradicció*.

Així doncs $\sqrt{2}$ no pot ser un nombre racional i com que és un real, ha de ser irracional.

q.e.d.